数学 コース1（基本コース）

I

問 1　2 次関数 $y = ax^2 + bx + \dfrac{3}{a}$ は，次の 2 つの条件 (i)，(ii) を満たすとする。

(i) $x = 3$ のとき，y は最大値をとる。

(ii) $x = 1$ のとき，y の値は 2 である。

このとき，a，b の値を求めよう。

条件 (i)，(ii) を用いて，a，b の関係式

$$\begin{cases} b = \boxed{\mathsf{AB}}\,a \\ \boxed{\mathsf{C}} = a + b + \dfrac{\boxed{\mathsf{D}}}{a} \end{cases}$$

を得る。
上の 2 式より，方程式

$$\boxed{\mathsf{E}}\,a^2 + \boxed{\mathsf{F}}\,a - \boxed{\mathsf{G}} = 0$$

を得る。よって

$$a = \boxed{\mathsf{HI}},\ b = \boxed{\mathsf{J}}$$

である。このとき，この関数の最大値は $\boxed{\mathsf{K}}$ である。

問 2　2 つの整式

$$P = 2x^2 - x + 2,\ Q = x^2 - 2x + 1$$

に対して

$$E = P^2 - 4Q^2 - 3P + 6Q$$

を考える。

(1) E の右辺を因数分解して[*1]

$$E = \left(P - \boxed{\mathbf{L}}\,Q\right)\left(P + \boxed{\mathbf{M}}\,Q - \boxed{\mathbf{N}}\right)$$

を得る。

(2) E を x の式で表すと

$$E = \boxed{\mathbf{O}}\,x\left(x - \boxed{\mathbf{P}}\right)\left(\boxed{\mathbf{Q}}\,x - \boxed{\mathbf{R}}\right)$$

となる。

(3) $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ のとき，E の値は $\boxed{\mathbf{S}} + \boxed{\mathbf{T}}\sqrt{\boxed{\mathbf{U}}}$ である。

[*1] 注）　因数分解する：factorize

II

問 1　1 つの箱に，n 個の赤球と $(20-n)$ 個の白球が入っている。ただし，$0 < n < 20$ とする。この箱から 1 球取り出し，その球の色を調べて元の箱に戻すという試行[*2]を繰り返す。

(1) 1 回の試行で赤球が取り出される確率を x とすると $x = \dfrac{n}{\boxed{\mathsf{AB}}}$ である。

(2) この試行を 2 回繰り返したとき，少なくとも 1 回は白球が出る確率を p とおく。このとき p を(1)の x を用いて表すと $p = \boxed{\mathsf{C}} - x^{\boxed{\mathsf{D}}}$ となる。

(3) この試行を 4 回繰り返したとき，少なくとも 2 回は白球が出る確率を q とおく。このとき q を(1)の x を用いて表すと

$$q = \boxed{\mathsf{E}} - \boxed{\mathsf{F}}\,x^{\boxed{\mathsf{G}}} + \boxed{\mathsf{H}}\,x^{\boxed{\mathsf{I}}}$$

となる。

(4) (2), (3)の p, q について，$p < q$ となるような n の最大値を求めよう。

$p < q$ より，不等式

$$\boxed{\mathsf{J}}\,x^2 - \boxed{\mathsf{K}}\,x + 1 > 0$$

を得る。これを解くと

$$x < \frac{1}{\boxed{\mathsf{L}}}$$

となるから，n の最大値は $\boxed{\mathsf{M}}$ である。

[*2] 注）　試行：trial

問 2　p を素数とし，x，y を正の整数とする。このとき

$$\frac{p}{x}+\frac{7}{y}=p$$

を満たす p，x，y の組をすべて求めよう。

与えられた式を変形して

$$\left(x-\boxed{\textbf{N}}\right)\left(py-\boxed{\textbf{O}}\right)=\boxed{\textbf{P}}$$

を得る。これより

$$x-\boxed{\text{N}}=\boxed{\textbf{Q}}\text{ または }\boxed{\textbf{R}}\quad\left(\text{ただし，}\boxed{\text{Q}}<\boxed{\text{R}}\right)$$

である。したがって

$$x=\boxed{\textbf{S}}\text{ または }\boxed{\textbf{T}}\quad\left(\text{ただし，}\boxed{\text{S}}<\boxed{\text{T}}\right)$$

である。

まず，$x=\boxed{\text{S}}$ のとき

$$p=\boxed{\textbf{U}},\ y=\boxed{\textbf{V}}$$

または

$$p=\boxed{\textbf{W}},\ y=\boxed{\textbf{X}}\quad\left(\text{ただし，}\boxed{\text{U}}<\boxed{\text{W}}\right)$$

である。

また，$x=\boxed{\text{T}}$ のとき

$$p=\boxed{\textbf{Y}},\ y=\boxed{\textbf{Z}}$$

である。

Ⅲ

x の 2 次関数

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

関数 ① のグラフは 2 点 $(-1,\ -1)$，$(2,\ 2)$ を通るものとする。

(1) b，c を a の式で表すと

$$b = \boxed{\textsf{A}} - a,\ c = \boxed{\textsf{BC}}\,a$$

となる。

(2) 関数 ① のグラフと x 軸との交点のうちの 1 つは，$0 < x \leqq 1$ の範囲内にあるとする。このとき，a の値の範囲は

$$\boxed{\textsf{D}} < a \leqq \frac{\boxed{\textsf{E}}}{\boxed{\textsf{F}}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。

(3) a の値が ② の範囲内を変化するとき，$a + bc$ の値の範囲は

$$\frac{\boxed{\textsf{GH}}}{\boxed{\textsf{I}}} \leqq a + bc \leqq \boxed{\textsf{J}}$$

である。

IV

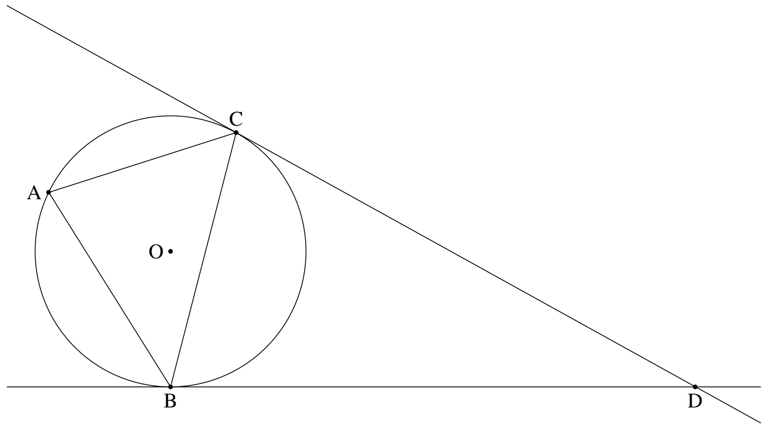
三角形 ABC は

$$\mathrm{AB}=7,\ \mathrm{BC}=8,\ \mathrm{CA}=6$$

を満たしている。

三角形 ABC の外接円[*3]の中心を O，半径を r とおく。

また，この外接円にそれぞれ点 B，C で接する 2 本の接線を引き，その交点を D とする。



このとき

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\boxed{\mathbf{A}}}{\boxed{\mathbf{B}}},\ \sin\angle\mathrm{BAC}=\frac{\sqrt{\boxed{\mathbf{CD}}}}{\boxed{\mathbf{E}}},$$

$$r=\frac{\boxed{\mathbf{FG}}\sqrt{\boxed{\mathbf{HI}}}}{\boxed{\mathbf{JK}}},\ \mathrm{BD}=\boxed{\mathbf{LM}}$$

である。

さらに，外接円の円周上に点 P をとるとき，線分 DP の最短の長さは $\dfrac{\boxed{\mathbf{NO}}\sqrt{\boxed{\mathbf{PQ}}}}{\boxed{\mathbf{R}}}$

である。

[*3] 注）　外接円：circumscribed circle

解答

I								
問 1						問 2		
AB	CD	EFG	HI	J	K	LMN	OPQR	STU
−6	23	523	−1	6	6	223	3141	365

II											
問 1						問 2					
AB	CD	EFGHI	JK	L	M	NOP	QR	ST	UV	WX	YZ
20	12	14334	34	3	6	117	17	28	27	72	24

III					
A	BC	D	EF	GHI	J
1	−2	0	12	−18	0

IV				
AB	CDE	FGHIJK	LM	NOPQR
14	154	161515	16	16155

2014.10.26　初版
okd
小春论坛　http://www.xiaochuncnjp.com/